

٤ نتائج التقارب المنتظم

سنبين الآن فائدة التقارب المنتظم فنثبت أنه يحافظ على الاتصال ويمكن معه إجراء عمليات التفاضل والتكامل حداً بحد.
نبدأ بنظرية توضح علاقة التقارب المنتظم بالنهايات في المتغير x

٤-١- نظرية (علاقة التقارب المنتظم بالنهايات): إذا كانت متتابعة الدوال $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية، تقارباً منتظماً للدالة f على A وكانت $x_0 \in A$ ، فإن كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$ موجودة وتساوي العدد الحقيقي ℓ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

برهان - لنضع $\ell_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ وليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من التقارب المنتظم للمتتابعة نجد

$$(١) \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n : n > n_1 \implies \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4$$

ومن الشرط $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \ell$ نجد

$$(٢) \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n : n > n_2 \implies |\ell_n - \ell| < \varepsilon/4$$

نأخذ $n_0 = \max(n_1, n_2)$ ثم نختار $m = n_0 + 1$ ونستخدم الشرط $\lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) = \ell_m$ الذي يعطى

$$(٣) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \implies |f_m(x) - \ell_m| < \varepsilon/2.$$

الآن $\forall x \in A : |x - x_0| < \delta$ يكون

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &= |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - \ell_m + \ell_m - \ell| \\ &\leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - \ell_m| + |\ell_m - \ell| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 \quad \text{من العلاقات (١)، (٣)، (٢) على الترتيب} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

وهو ما يثبت المطلوب.

من هذه النظرية يمكن استنتاج

٤-٢- نظرية (علاقة التقارب المنتظم بالاتصال): إذا كانت متتابعة الدوال $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية، تقارباً منتظماً للدالة f على A وكانت f_n متصلة على A لكل $n \in \mathbb{N}$ فإن f تكون متصلة على A .

البرهان - متروك للقارئ.

النظرية التالية تسمح بإيجاد تكامل دالة النهاية بمكاملة حدود المتتابعة حداً بحد ثم أخذ نهاية التكاملات. لكننا سنعطى مراجعة سريعة لمفهوم التكامل قبل النظرية:

ليكن لدينا دالة محدودة g على الفترة $[a, b]$ لدراسة المساحة المحصورة بين منحنى g ومحور السينات نأخذ تجزئة $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ للفترة، ونعرف تجميعات داربو العلوية والسفلية بالعلاقات

$$U(\mathcal{P}, g) = \sum_{k=1}^n M_k(g)(x_k - x_{k-1}), \quad L(\mathcal{P}, g) = \sum_{k=1}^n m_k(g)(x_k - x_{k-1}),$$

$$m_k(g) = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x), \quad M_k(g) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} g(x) \text{ حيث}$$

ويقال أن g قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على الفترة $[a, b]$ إذا تحقق

$$\forall \eta > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathcal{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| < \delta \implies U(\mathcal{P}, g) - L(\mathcal{P}, g) < \eta \right).$$

ويكون $\int_a^b g(x) dx = \lim U(\mathcal{P}, g) = \lim L(\mathcal{P}, g)$ حيث النهاية مأخوذة عندما $\delta \rightarrow 0$.

٢-٤ - نظرية (علاقة التقارب المنتظم بالتكامل): إذا كانت متتابعة الدوال $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب تقارباً منتظماً للدالة f على الفترة $[a, b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ، وكانت f_n قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على $[a, b]$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، فإن f تكون أيضاً قابلة للتكامل على $[a, b]$ وتحقق

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

برهان - قابلية الدوال f_n للتكامل بمفهوم ريمان تتضمن الفرض بأن كل f_n محدودة. سنثبت أولاً أن الدالة f محدودة.

لإثبات ذلك نأخذ $\varepsilon > 0$ ونختار $n > n_1$ حيث n_1 نحقق العلاقة ١ كما نأخذ $M > 0$ بحيث $\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \leq M$ يكون لدينا

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| < \varepsilon/4 + M.$$

يثبت هذا محدودية الدالة f .
سنثبت الآن أن f قابلة للتكامل بمفهوم ريمان. لتكن $\eta > 0$ معطاة ونضع $\varepsilon = \eta/(b-a)$ ، وليكن $n > n_1$ حيث n_1 يحقق (١)، من قابلية الدالة f_n للتكامل على $[a, b]$ نوجد $\delta > 0$ بحيث لأي تجزئة $\mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ للفترة نحقق $\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| < \delta$ يكون

$$U(\mathcal{P}, f_n) - L(\mathcal{P}, f_n) < \eta/2,$$

باستخدام (١) نستطيع بسهولة إثبات أن $M_k(f) < M_k(f_n) + \varepsilon/4$ و $m_k(f) > m_k(f_n) - \varepsilon/4$ وبالتالي

$$\begin{aligned} U(\mathcal{P}, f) - L(\mathcal{P}, f) &= \sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f))(x_k - x_{k-1}) \\ &< (\varepsilon/2) \left(\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (M_k(f_n) - m_k(f_n))(x_k - x_{k-1}) \\ &= (\varepsilon/2)(b-a) + U(\mathcal{P}, f_n) - L(\mathcal{P}, f_n) \\ &< \eta/2 + \eta/2 = \eta. \end{aligned}$$

وهو ما يثبت أن f قابلة للتكامل على $[a, b]$ ، كما يثبت أيضا أن

$$L(\mathcal{P}, f_n) - \eta/2 < L(\mathcal{P}, f) < U(\mathcal{P}, f) < U(\mathcal{P}, f_n) + \eta/2$$

وهو ما يعطي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

النظرية الأخيرة في هذا الفصل تبين أن من الممكن إيجاد مشتقة دالة النهاية بحساب مشتقات حدود المتتابعة ثم أخذ النهاية، لكن هذه العلاقة تستلزم تقارب متتابعة المشتقات تقاربا منتظما.

٤-٤- نظرية (علاقة التقارب المنتظم بالاشتقاق): لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال معرفة على $]a, b[$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a < b$ ، وليكن

(أ) توجد نقطة $x_0 \in]a, b[$ بحيث يكون $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ تقاربية.

(ب) f_n قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(ج) $\left(\frac{d}{dx} f_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب تقاربا منتظما إلى دالة g على $]a, b[$.

فإن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام إلى دالة f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ ، ويكون $f'(x) = g(x)$ لكل $x \in]a, b[$.

برهان - سنثبت أولا أن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام إلى دالة f على $]a, b[$ وذلك باستخدام شرط كوشي. ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من شرط كوشي للتقارب المنتظم للمتتابعة $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ نعلم أن

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n, m > n_1 \implies \sup_{x \in]a, b[} |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon/2(b-a)$$

ومن شرط كوشي لتقارب متتابعة الأعداد $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ نعلم أن

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : n, m > n_2 \implies |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon/2.$$

نختار $n_0 = \max(n_1, n_2)$ ونأخذ $n, m > n_0$. ونضع $u(x) = f_n(x) - f_m(x)$. من الواضح أن u قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ ، فيمكننا استخدام نظرية لاجرانج للقيمة المتوسطة التي نعطي

$$\forall x \in]a, b[\exists \theta \in]a, b[: |u(x) - u(x_0)| = |u'(\theta)| |x - x_0| \leq |u'(\theta)| (b-a).$$

الآن نرى أن

$$\begin{aligned} \sup_{x \in]a, b[} |f_n(x) - f_m(x)| &= \sup_{x \in]a, b[} |u(x)| \\ &\leq \sup_{x \in]a, b[} |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0)| \\ &\leq \sup_{\theta \in]a, b[} |u'(\theta)| (b-a) + |u(x_0)| \\ &= (b-a) \sup_{\theta \in]a, b[} |f'_n(\theta) - f'_m(\theta)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &< (b-a) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

سنثبت الآن أن f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ ، فلتأخذ أي نقطة $c \in]a, b[$ ونضع

الدوال h_n نحقق

die also h_n (r)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c).$$

٤-٥- تطبيق: لتكن $\varphi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ دالة قابلة للاشتقاق بحيث $|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$ لكل $x \in]a, b[$ نضع

$$f_n : [a, b] \longrightarrow [a, b] \text{ تحقق } f_n \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| &= |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f_{n-1}(x))| \\ &= |\varphi'(\theta)| |f_n(x) - f_{n-1}(x)|, \theta \in]a, b[\end{aligned}$$

فینتج

باستخدام الاستنتاج الرياضي نحصل على

وباستخدام الاستنتاج الرياضي مرة أخرى نجد

مما يثبت أن المتتابعة $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم.

(ج) لدينا أيضا من قاعدة السلسلة $|f'_{n+1}(x)| = |\varphi'(f_n(x))| |f'_n(x)| \leq \alpha |f'_n(x)|$ وباستخدام الاستنتاج الرياضي نجد $|f'_{n+1}(x)| \leq \alpha^n |f'_1(x)|$ وحيث أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ فإن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in]a, b[} |f'_{n+1}(x)| = 0 \quad \text{لأن} \quad \sup_{x \in]a, b[} |f'_1(x)| \leq \alpha.$$

(د) لتكن f دالة النهاية. $f_n \Rightarrow f$ ، وحيث أن f_n قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ لكل n . $f'_n \Rightarrow 0$ فإن f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ ونحقق $f'(x) \equiv 0$ أي أن f دالة ثابتة.

٦.٤ أسئلة. اختر الإجابات الصحيحة

(١) لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال بحيث $f_n \Rightarrow f$ على A ، ولتكن $x_0 \in A$ فإن

() f_n منفصلة عند $x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f$ منفصلة عند x_0 .

() f_n متصلة عند $x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f$ متصلة عند x_0 .

() f منفصلة عند $x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ منفصلة عند x_0 .

() f متصلة عند $x_0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ متصلة عند x_0 .

(٢) لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال المتصلة التي تتقارب نقطيا لدالة f ولا تتقارب بانتظام إلى f ، فإن

() f لابد أن تكون دالة منفصلة

() f لابد أن تكون دالة متصلة

() f يمكن أن تكون دالة متصلة أو منفصلة

(٣) لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال بحيث $f_n \Rightarrow f$ على فترة $[a, b]$ ولتكن $g_n(x) = \int_a^x f_n(x) dx, x \in [a, b]$ و $g(x) = \int_a^x f(x) dx$ ، فإن

() $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \int_a^b f(x) dx \quad \exists x \in [a, b] : \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \neq g(x)$

() $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب إلى g نقطيا وليس بانتظام على A .

(٤) لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال و f دالة معرفة على $[a, b]$

() $f_m \Rightarrow f \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

() إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f_m \Rightarrow f$ فإن $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

() إذا كانت $f : \forall n \quad f_m \Rightarrow f$ و f_n متصلة على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

() إذا كانت $f \Rightarrow f_m$ و f قابلة للتكامل على $[a, b]$ فإن $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

(٥) لتكن $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الدوال القابلة للاشتقاق على $]a, b[$ ، ولتكن f دالة معرفة على $[a, b]$

() إذا كانت $f_m \Rightarrow f$ فإن $f'_n(x) \rightarrow f'(x)$

() إذا كانت $f_m \Rightarrow f$ وكانت f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$ فإن $f'_n \Rightarrow f'$

() إذا كانت $f'_m \Rightarrow f'$ فإن $f_m \Rightarrow f$

() إذا كانت $f'_m \Rightarrow f'$ وكانت $f_m \Rightarrow f$ فإن f قابلة للاشتقاق على $]a, b[$

٧.٤ تمارين

(١) في كل حالة مما يلي إدرس متى تكون نهاية المتتابعة $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ دالة متصلة، ومتى تكون قابلة للاشتقاق.

$$، f_n(x) = \frac{1}{nx} \sin nx, x \neq 0 \quad (أ) \quad ، f_n(x) = \begin{cases} nx \sin(\frac{1}{nx}) & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (ج)$$

$$، f_n(x) = x^n + \frac{1}{2^n x^n}, x \neq 0 \quad (ب) \quad ، f_n(x) = 2^n \sin(\frac{x}{3^n}), x \in \mathbb{R} \quad (د)$$

$$\begin{aligned} (ز) \quad f_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos(2k+1)x, x \in \mathbb{R} \\ (هـ) \quad f_n(x) &= |x|^{1+1/n}, x \in \mathbb{R} \\ (و) \quad f_n(x) &= \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(٢) لتكن $f_n \Rightarrow f$ على A ، ولتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من عناصر A بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in A$ برهن أنه إذا كانت f متصلة عند x فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$. هل النتيجة صحيحة دون شرط الاتصال؟

(٣) لتكن $f_n \Rightarrow f$ على $[a, b]$ حيث $a, b \in \mathbb{R}, b > a$. برهن أنه إذا كان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+0}^b f_n(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+0}^b f_n(x) dx = \int_{a+0}^b f(x) dx$$

(٤) لتكن $f_n(x) =$ برهن أن

$$\int_0^1 f_n(x) dx \text{ تقاربي لكل } n \in \mathbb{N} \quad (ا)$$

(ب) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على $[0, 1]$ إلى دالة f (أوجدتها).

(ج) $\int_0^1 f(x) dx$ تباعدي.

٥ متسلسلات الدوال

متسلسلات الدوال نوع خاص من متتابعات الدوال، وتتميز متسلسلات الدوال ببعض الطرق لدراسة تقاربها كما تتميز بكثرة تطبيقاتها. متسلسلة الدوال هي صيغة

$$\sum_k f_k(x), \quad f_k : A \longrightarrow \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}.$$

متتابعة الدوال $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تسمى حدود المتسلسلة، ونعرف المجموع الجزئي للمتسلسلة على أنه الدالة $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$.

إذا كانت $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب على A (تقاربا بسيطا أو منتظما)، فإننا نقول أن $\sum_k f_k(x)$ تتقارب على A (تقاربا بسيطا أو منتظما)، وفي هذه الحالة تسمى الدالة $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ مجموع المتسلسلة.

١-٥ - نظرية (اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم): لتكن $\sum_k f_k(x)$ متسلسلة من الدوال المعروفة على A . إذا وجدت متسلسلة تقاربية $\sum_k M_k$ من الأعداد الحقيقية بحيث

$$\sup_{x \in A} |f_k(x)| \leq M_k \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

فإن $\sum_k f_k(x)$ تتقارب بانتظام على A .

برهان - لتكن $\sum_k M_k$ متسلسلة من الأعداد الحقيقية تحقق شروط النظرية. سنعتمد في البرهان على شرط كوشي للتقارب المنتظم (؟؟).

ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، من تقارب متسلسلة الأعداد $\sum_k M_k$ نعلم أنها تحقق شرط كوشي لتقارب متسلسلات الأعداد، ويعني ذلك أنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$m > n > n_0 \implies \sum_{k=n+1}^m M_k < \varepsilon.$$

ويؤدي هذا من فروض النظرية إلى

$$m > n > n_0 \implies \sum_{k=n+1}^m \sup_{x \in A} |f_k(x)| < \varepsilon,$$

وبالتالي

$$\sup_{x \in A} |S_m(x) - S_n(x)| = \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \sup_{x \in A} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

يعني هذا أن $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم، وتكون بالتالي تقارباً منتظماً على A .

٢-٥ - أمثلة:

(١) لتكن $f_k(x) = (-1)^k x^k (1-x)$ ، $x \in [0, 1]$ ، سنرى أن $\sum_k f_k(x)$ تقارباً منتظماً على $[0, 1]$ لكنها لا تحقق شروط اختبار فايرشتراس، وهو ما يبين أن شروط اختبار فايرشتراس شروط كافية للتقارب المنتظم لكنها غير لازمة.

(١) بدراسة القيم العظمى للدالة نجد أن $\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x)| = \frac{1}{k+1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k$ ، فإذا

كانت $M_k \geq \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x)|$ لكل k فإن $\sum_k M_k$ تتباعد، لأن $\sum_k \frac{1}{k+1} \left(\frac{k}{k+1} \right)^k$ تباعدة.

(ب) المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ متسلسلة هندسية أساسها $-x$ وبالتالي تكون صيغة الباقي

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} (1-x) - (-1)^{n+p+1} x^{n+p+1} (1-x)}{1+x} \right| \\ &= \frac{x^{n+1}}{1+x} | (1-x)(1 - (-1)^p x^p) | \\ &\leq \frac{2(1-x)x^{n+1}}{1+x}. \end{aligned}$$

وينتج أن

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sup_{x \in [0,1]} \frac{2(1-x)x^{n+1}}{1+x}.$$

وبدراسة القيم العظمى للدالة $\varphi(x) = \frac{2(1-x)x^{n+1}}{1+x}$ نجد أن لها قيمة عظمى تساوي $\varphi(x_n)$ حيث $x_n = \sqrt{1 + \frac{1}{(n+1)^2}} - \frac{1}{n+1}$ وحيث أن φ متصلة عند 1 وأن $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(1) = 0$ فإن $x_n \rightarrow 1$ وهو ما يثبت تحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم.

(٢) في المثال السابق من السهل إثبات أن $\sum_k |f_k(x)|$ لا تتقارب بانتظام على $[0, 1]$ وهو ما يوضح أن التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_k f_k(x)$ لا يستلزم التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_k |f_k(x)|$.

(٣) سنعطي مثالا على التطبيق المباشر لاختبار فايرشتراس: لنكن $f_k(x) = \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ بالحساب المباشر نجد

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_k(x)| = \frac{1}{(2k-1)^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(2k-1)x| = \frac{1}{(2k-1)^2} = M_k.$$

وحيث أن $\sum_k M_k = \sum_k \frac{1}{(2k-1)^2}$ تقاربة، فإن $\sum_k f_k(x)$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$.

(٤) مثال أعم على التطبيق المباشر لاختبار فايرشتراس، إذا كانت $\sum_k a_k f_k(x)$ متسلسلة بحيث a_k ثوابت، وكانت $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ محدودة بانتظام على A وكانت $\sum_k |a_k|$ تقاربة، فإن $\sum_k a_k f_k(x)$ تحقق شروط اختبار فايرشتراس وبالتالي تتقارب بانتظام على A .

٣-٥ - نظرية (اختبار ديريكليه للتقارب المنتظم): لتكن لدينا متسلسلة من الدوال على الصورة $\sum_k f_k(x) g_k(x)$ معروفة على A ، إذا تحققت الشروط

(أ) $(g_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ متتابعة تناقصية، أي أن $g_k(x) \geq g_{k+1}(x)$ لكل $x \in A$ ولكل $k \in \mathbb{N}$

(ب) $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام إلى الدالة الصفرية على A ،

(ج) المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_k f_k(x)$ محدودة بانتظام على A ، أي أن يوجد $M > 0$ بحيث

$$\sup_{x \in A} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

فإن المتسلسلة $\sum_k f_k(x) g_k(x)$ تتقارب بانتظام على A .

برهان - نضع $F_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ فيكون $f_k(x) = F_k(x) - F_{k-1}(x)$ ونضع $g_{-1} = 0, F_{-1} = 0$ فنجد أن

$$\begin{aligned} g_k f_k &= g_k F_k - g_k F_{k-1} = g_k F_k - g_{k-1} F_{k-1} + g_{k-1} F_{k-1} - g_k F_{k-1} \\ &= g_k F_k - g_{k-1} F_{k-1} + F_k(g_k - g_{k-1}) \end{aligned}$$

وبالتالي $\forall x \in A$ و $\forall n, m \in \mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) f_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) F_k(x) - g_{k-1}(x) F_{k-1}(x) \right| \\
&+ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} F_k(x) (g_k(x) - g_{k-1}(x)) \right| \\
&\leq |g_{n+p}(x) F_{n+p}(x) - g_n(x) F_n(x)| \\
&+ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} F_k(x) (g_k(x) - g_{k-1}(x)) \right| \\
&\leq |g_{n+p}(x) F_{n+p}(x)| + |g_n(x) F_n(x)| \\
&+ \sum_{k=n+1}^{n+p} |F_k(x)| |g_k(x) - g_{k-1}(x)| \\
&\leq M \left(|g_{n+p}(x) + g_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{n+p} |g_{k-1}(x) - g_k(x)| \right) \\
&= 2M g_n(x).
\end{aligned}$$

نأخذ أي $\varepsilon > 0$. من الفرض أن $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام إلى الدالة الصغرية على A . فإنه يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n > n_0 \implies \sup_{x \in A} |g_n(x)| < \varepsilon/2M \implies \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

يثبت هذا أن المتسلسلة $\sum_k g_k f_k$ تحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم (٤٩).

٤-٥- أمثلة:

(١) أبسط تطبيقات اختبار ديريكليه هو عندما يكون لدينا متسلسلة $\sum_k (-1)^k g_k(x)$ بحيث $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تناقصية على A .

بما أن $B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k$ محدودة. فإن شروط اختبار ديريكليه نتحقق ونكون $\sum_k (-1)^k g_k(x)$ تقارباً منتظماً على A .

(٢) لندرس تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx)$$

نلاحظ أن

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \left(\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right) \right) \\
&= \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right).
\end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x)| \leq 2$ ومن اختبار ديريكليه ينتج أن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(nx)$$

تقارب بانتظام على $\mathbb{R}$

عودة لمتسلسلات القوى

كثيرات الحدود دوال بسيطة ومن السهل إيجاد مشتقاتها وتكاملاتها، فأي كثيرة حدود هي دالة قابلة للاشتقاق لأي عدد من المرات ومشتقاتها كثيرات حدود، كما أن التكامل غير المحدد لكثيرة حدود هو أيضا كثيرة حدود.

هل يمكن أن نقول الشيء نفسه عن إي متسلسلة قوى؟ من النظريات التي درسناها في نتائج التقارب المنتظم (٤.٢)، (٤.٣)، (٤.٤) نستنتج

٥-٥- نظرية: لتكن $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$ متسلسلة قوى، وليكن

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$$

فإن $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$ ، فإن

$$(١) \quad f \text{ دالة متصلة على }]c - R, c + R[.$$

$$(٢) \quad f \text{ قابلة للتكامل على أي فترة مغلقة } [a, b] \subset]c - R, c + R[, \text{ ويكون}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1})$$

$$(٣) \quad f \text{ قابلة للاشتقاق في الفترة }]c - R, c + R[\text{ ومشتقتها تغطي من العلاقة}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

٦-٥ - نظرية (تساوي متسلسلات القوى Identity theorem for power series):

(١) إذا كانت المتسلسلة $\sum a_k x^k$ تقاربية في فترة $]-r, r[$ حيث $r > 0$ وكان مجموعها هو الدالة $f(x)$ فإنها تكون هي متسلسلة ماكلورين للدالة f في هذه الفترة، أي أن

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{لكل } k \in \mathbb{N}$$

(٢) إذا كانت $\sum a_k x^k$ و $\sum b_k x^k$ متسلسلتين قويتين لهما نطاق مشترك للتقارب $]-r, r[$ ، وكان مجموعهما متساويين في $]-r, r[$ فإن معاملاتهما متساوية. أي أن

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \forall x \in]-r, r[\implies a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

برهان - من الواضح أن (٢) ننتج من (١). لإثبات (١) نشق الدالة $f(x)$ اشتقاقاً متوالياً.

٧.٥ أسئلة.

(١) اختبار فايرشتراس يعني أن المتسلسلة $\sum_k f_k(x)$ تتقارب بانتظام على A إذا كان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| = 0 \quad () \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| = 0 \quad ()$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_k(x)| = 0 \quad () \quad \sup_n \sup_x |f_n(x)| = 0 \quad ()$$

(٢) في اختبار فايرشتراس: التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_k f_k(x)$ على A

$$\begin{aligned} & \sum_k \sup_{x \in A} |f_k(x)| \text{ المتسلسلة } () \\ & \text{ينتج من تقارب المتسلسلة } \sum_k \sup_{x \in A} |f_k(x)| \text{ المتسلسلة } () \\ & \text{يستلزم تقارب المتسلسلة } \sum_k \sup_{x \in A} |f_k(x)| \text{ المتسلسلة } () \\ & \text{لا علاقة له بتقارب المتسلسلة } \sum_k \sup_{x \in A} |f_k(x)| \text{ المتسلسلة } () \end{aligned}$$

(٣) إذا كانت المتسلسلة $\sum_k f_k(x)$ تقاربية عند نقطة في الفترة $[a, b]$ ، وكانت كل من الدوال f_n قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ ، فإن الدالة $f(x) = \sum_k f_k(x)$ تكون معرفة وقابلة للاشتقاق على $[a, b]$ إذا تحقق

$$\begin{aligned} & \text{المتسلسلة } \sum_k \sup_{x \in A} |f_k(x)| \text{ تتقارب } () \quad \text{المتسلسلة } \sum_k \sup_{x \in A} |f'_k(x)| \text{ تتقارب } () \\ & \sum_k \int_a^b |f_k(x)| dx \text{ تتقارب } () \quad \sum_k |f'_k(x)| \text{ تتقارب على } [a, b] \text{ ()} \end{aligned}$$

(٤) التقارب المنتظم للمتسلسلة $\sum_k f_k(x)g_k(x)$ ينتج من الشرطين

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n f_k(x) \text{ محدودة بانتظام } () \quad g_k(x) \searrow 0 \text{ و } () \\ & (f_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية و } |g_k(x)| \text{ محدودة بانتظام } () \\ & (g_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \text{ تناقصية و } \sum_{k=0}^n f_k(x) \text{ محدودة بانتظام } () \\ & f_k(x) \searrow 0 \text{ و } |g_k(x)| \text{ محدودة بانتظام } () \end{aligned}$$

٨.٥ تمارين.

(١) إدرس التقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال الآتية

$$\sum_k \frac{1}{k^x} \quad (ا)$$

$$\sum_k (-1)^k \frac{1}{k^{\ln x}} \quad (د)$$

$$\sum_k (-1)^k \frac{1}{k^x} \quad (ب)$$

$$\sum_k \frac{\cos kx}{e^{kx}} \quad (هـ)$$

$$\sum_k \frac{1}{kx^k} \quad (ج)$$

$$\sum_k \frac{\tan^k x}{x^k} \quad (و)$$

(٢) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $\arctan x$ وادرس تقاربها.

(٣) برهن أن المتسلسلة $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ تتقارب بانتظام على $[p, +\infty[$ لأي $p > 1$.

برهن أيضا أن $\zeta(s)$ قابلة للاشتقاق على $[1, \infty[$ وأن مشتقتها تعطى بالعلاقة

$$\zeta'(s) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s} \quad \forall s > 1.$$

استنتج علاقة مشابهة لحساب $\zeta^{(k)}(s)$.

(٤) برهن أن $\sum_n a_n \sin(nx)$ تتقارب بانتظام على $\mathbb{R}$ إذا كانت $\sum_n |a_n|$ تقاربية.

(٥) لتكن

$$H(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

ولتكن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من نقاط الفترة المفتوحة $]a, b[$ حيث $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ، ولتكن أخيرا $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية.

برهن أنه إذا كانت $\sum_n |c_n|$ تقاربية، فإن $\sum_n c_n H(x - x_n)$ تتقارب بانتظام على $[a, b]$ وأن المجموع $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H(x - x_n)$ يكون دالة متصلة عند كل $x \neq x_0$.

(٦) لتكن $f_k(x) = \frac{kx - [kx]}{k^2}$ ، برهن أن $\sum_k f_k(x)$ تتقارب بانتظام على $[0, 1]$. ثم أوجد جميع النقاط التي تكون عندها الدالة $f(x) = \sum_k f_k(x)$ منفصلة. هل هذه الدالة قابلة للتكامل بمفهوم ريمان؟

(٧) برهن: لتكن $\sum_k f_k(x)g_k(x)$ متسلسلة من الدوال تحقق

(ا) $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ تناقصية.

(ب) $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ محدودة بانتظام على A

(ج) $\sum_k f_k(x)$ تقاربية تقارب منتظم على A

فإن $\sum_k f_k(x)g_k(x)$ تتقارب بانتظام على A .